

Ответы: ЕГЭ по математике (профиль)

- | | |
|-----------|--------|
| 1 | 2,4 |
| 2 | -4 |
| 3 | 800 |
| 4 | 0,4 |
| 5 | 0,9984 |
| 6 | 1,5 |
| 7 | -38 |
| 8 | 4 |
| 9 | 0,22 |
| 10 | 35 |
| 11 | -0,25 |
| 12 | -4,8 |
| 13 | |

Решение.

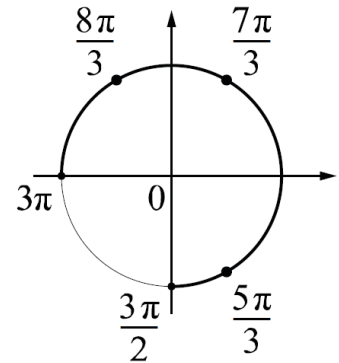
а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,75; \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

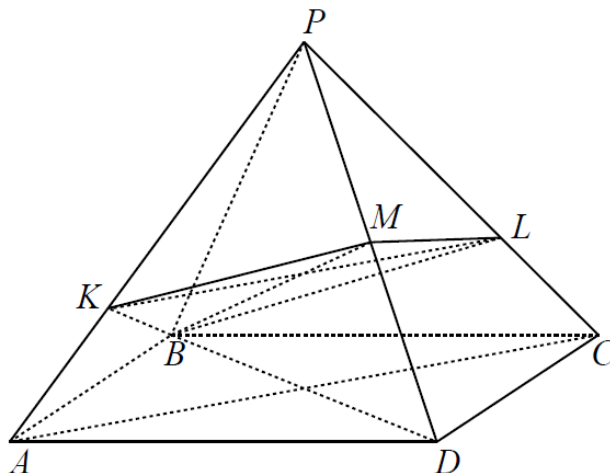
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Получим числа $\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$.



Решение.

а) Пусть точка M — середина ребра PD . Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD , отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60^\circ$, что и требовалось доказать.



б) Из доказанного следует, что $PA = AB\sqrt{2} = 60\sqrt{2}$ и $BM = 30\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD .

По теореме косинусов в треугольнике APD получаем:

$$AD^2 = AP^2 + PD^2 - 2AP \cdot PD \cdot \cos \angle APD, \text{ следовательно, } \cos \angle APD = \frac{3}{4}.$$

Пусть четырёхугольник $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA , а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \frac{PM}{\cos \angle APD} = 40\sqrt{2}$. Аналогично $PL = 40\sqrt{2}$. Значит,

$PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC . Поэтому $LK = 40\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD , а прямая BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2} BM \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot 30\sqrt{6} \cdot 40\sqrt{2} = 1200\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $1200\sqrt{3}$.

15**Решение.**

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{x^3 - 8 - x(x-2)^2}{|x-2|} \geq 0; \quad \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4 - x^2 - 2x)}{|x-2|} \geq 0; \quad \frac{4(x-2)(x+1)}{|x-2|} \geq 0.$$

Отсюда получаем, что $x \leq -1$ или $x > 2$.

Ответ: $(-\infty; -1], (2; +\infty)$.

16

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S; \frac{12S}{13}; \dots; \frac{2S}{13}; \frac{S}{13}; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,04S; 1,04 \cdot \frac{12S}{13}; \dots; 1,04 \cdot \frac{2S}{13}; 1,04 \cdot \frac{S}{13}.$$

Таким образом, платежи должны быть следующими:

$$0,04S + \frac{S}{13}; \frac{12 \cdot 0,04S + S}{13}; \dots; \frac{2 \cdot 0,04S + S}{13}; \frac{0,04S + S}{13}.$$

Седьмой платёж составит $\frac{7 \cdot 0,04 \cdot S + S}{13} = \frac{1,28S}{13}$.

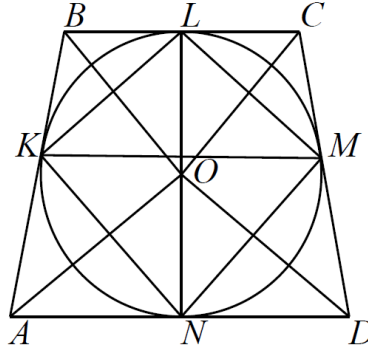
Сумма всех платежей равна:

$$S + S \cdot 0,04 \left(1 + \frac{12}{13} + \dots + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} \right) = S \left(1 + \frac{14 \cdot 0,04}{2} \right) = 1,28S.$$

Значит, банку будет выплачено $64\,000 \cdot 13 = 832\,000$ рублей.

Ответ: 832 000 рублей.

Решение.



а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\angle OAB + \angle OBA &= \frac{1}{2} \angle BAD + \frac{1}{2} \angle ABC = \\ &= \frac{1}{2} (\angle BAD + \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ; \\ \angle AOB &= 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

Отрезок AB виден из точки O под углом 90° . Следовательно, точка O принадлежит окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре.

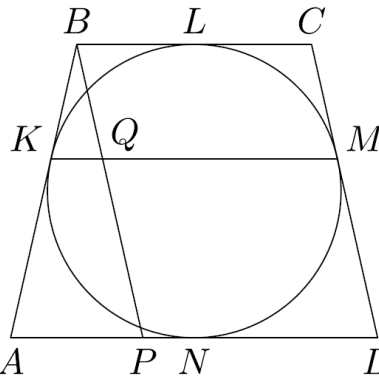
б) Пусть K , L , M и N — точки касания окружности со сторонами AB , BC , CD и AD данной трапеции соответственно. Тогда L — середина основания BC , потому что $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle OBL = \angle OCL$ и прямоугольные треугольники OBL и OCL равны по общему катету OL и острому углу. Аналогично N — середина основания AD . Обозначим

$$\begin{aligned}CM &= CL = BL = BK = x; \\ DM &= DN = AN = AK = y \quad (x < y); \\ OK &= OL = ON = OM = r; \\ x &= \frac{3}{4}y.\end{aligned}$$

Тогда $y = \frac{4}{3}x$, $LN = 2r$ — высота трапеции, а KM равно среднему

гармоническому длин отрезков AD и BC : $KM = \frac{2 \cdot AD \cdot BC}{AD + BC}$.

Для полноты докажем это утверждение. Отложим на стороне AD отрезок $PD = BC$, и пусть Q — точка пересечения отрезков BP и KM . Тогда $BCDP$ — параллелограмм и BP параллельно CD .



Легко видеть, что $BK = \frac{BC}{2}$, $AK = \frac{AD}{2}$, $AB = \frac{AD + BC}{2}$, $QM = BC$, а KQ находится из подобия треугольников BKQ и BAP :

$$\frac{KQ}{AP} = \frac{BK}{AB} = \frac{BC}{AD + BC}, \quad KQ = \frac{(AD - BC) \cdot BC}{AD + BC},$$

$$KM = KQ + QM = \frac{BC \cdot (AD - BC)}{AD + BC} + BC = \frac{2 \cdot AD \cdot BC}{AD + BC}.$$

$$KM = \frac{2BC \cdot AD}{BC + AD} = \frac{2 \cdot 2x \cdot 2y}{2x + 2y} = \frac{4xy}{x + y} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2}{3 \cdot 7x} = \frac{16}{7}x.$$

Пусть площадь трапеции $ABCD$ равна S , а площадь четырёхугольника $KLMN$ равна S_1 . Тогда

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot LN = \frac{2x + 2y}{2} \cdot 2r = 2(x + y)r = \frac{14}{3}xr,$$

а так как диагонали KM и LN четырёхугольника $KLMN$ перпендикулярны, получаем, что

$$S_1 = \frac{1}{2}KM \cdot LN = \frac{1}{2} \cdot \frac{16x}{7} \cdot 2r = \frac{16}{7}xr.$$

Следовательно,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{16xr \cdot 3}{7 \cdot 14xr} = \frac{24}{49}.$$

Ответ: б) $\frac{24}{49}$.

Решение.

Если $2a - 4 < 0$, то есть $a < 2$, то уравнение $|x - a + 1| + |x + a - 3| = 2a - 4$ решений не имеет.

При $a = 2$ уравнение имеет вид $|x - 1| + |x - 1| = 0$ и ни одно число из отрезка $[2; 4]$ не является его решением.

При $a > 2$ запишем уравнение в виде

$$|x - (a - 1)| + |x - (-a + 3)| = 2a - 4.$$

При $a > 2$ верно неравенство $-a + 3 < a - 1$, и поэтому решением уравнения является любое число из отрезка $[-a + 3; a - 1]$, поскольку длина этого отрезка равна $(a - 1) - (-a + 3) = 2a - 4$, а уравнению удовлетворяют те и только те точки x , сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = a - 1$ и $x = -a + 3$ равна $2a - 4$.

Отрезок $[-a + 3; a - 1]$ содержит отрезок $[2; 4]$ тогда и только тогда, когда $-a + 3 \leq 2$ и $a - 1 \geq 4$, откуда следует, что $a \geq 5$.

Ответ: $a \geq 5$.

19**Решение.**

а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 58, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,575 до 0,585. Поскольку всего проголосовало 12 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $12 \cdot 0,575 = 6,9$, но меньше $12 \cdot 0,585 = 7,02$, то есть равно 7. После того как Вася проголосовал, доля голосов за первого футболиста стала равна $\frac{7}{13} = 0,538\dots$. Значит, его рейтинг стал равен 54.

б) Пусть за 177 футболистов было отдано по одному голосу, а за оставшегося — 23, всего 200 голосов. В этом случае 177 футболистов имеют рейтинг 1, а последний — 12; сумма рейтингов равна 189. Если Вася отдаст свой голос за последнего футболиста, то его рейтинг останется равным 12, а рейтинги всех остальных футболистов станут равны 0. В этом случае сумма рейтингов станет равна 12, то есть уменьшится на 177.

в) Заметим, что для каждого из 178 футболистов доля отданных за него голосов, выраженная в процентах, отличается от рейтинга не более чем на 0,5. Поэтому сумма рейтингов всех футболистов отличается от 100 не более чем на $0,5 \cdot 178 = 89$. В частности, эта сумма не может превосходить 189.

Пример, приведённый в предыдущем пункте, показывает, что сумма рейтингов может равняться 189. Значит, наибольшее значение суммы рейтингов всех футболистов — это 189.

Ответ: а) 54; б) да; в) 189.